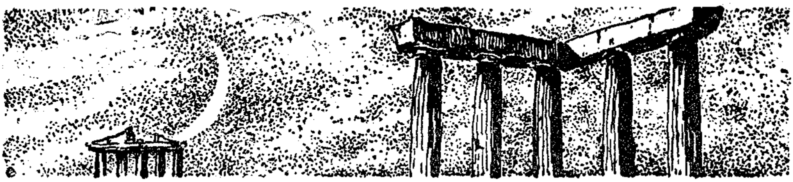
新量子力學の發展(3)

ヨルダン, ペ



新量子力學の發展 (3)

コペンハーゲンに於て ペ・ヨルダン

(Die Naturwissenschaften 誌 1927 第 30 號所載)

4. 『q-數』の 理 論

量子力學のマトリックス理論は，前節に於て述べたるが如く，其の本質に於ては，週期的な或は多重に週期的な型の運動を理論的に取扱ふ爲めには充分足りる所のものであるが，然しながら一度斯くの如き運動の解析的研究をなさんとすれば，次の樣な事情の爲めに非常に其の範圍が狹まめられて來る．即ち丁度時間の週期的な函數である樣な座標に限らねばならぬのである．然るに例へば水素原子問題に際して其の極座標 r, φ をマトリックス的に表はす事は不可能である．如何となれば（古典的な理論に從つて言へば）φ は決して時間の週期的函數ではないからである．同樣にしてマトリックス理論の骨組では古典論に於ける所謂『角座標』(Winkelkoordinaten) にアナローグなものは何もないのであるが而も此の角座標は，御存知の通り古典理論に於ては運動を最も簡單に表はす事が出來るのである．最後に，例へば，最も簡單な而も一般に可能な運動である所の直線慣性運動(Geradlinige Trägheitsbewegung) の如きも，それが全く aperiodisch な性質のものであると言ふ事の爲めにマトリックス理論の繩張り外にある．若し週期的な運動を取扱ふ爲めに，もつと多くの解析的運動自由度を執り，同時に又 aperiodisch な運動をも完全に理論の中に引き入れやうと欲するならば，量子論的な量のハイゼンベルグ式マトリックス表現法の必然的な一般化をな

さねばならない．上に述べた Heisenberg のマトリツクスは實際，例へばエネルギーこ言ふやうに時間的に常數であるやうな如何なる量も丁度對角線マトリツクスこして表はれて來るやうな種類のものである．然しながら，吾人は他の種のマトリツクスを定義して，對角線マトリツクスが全く他の意味をもつやうにする事が出來るのである．理論を斯ふ言ふ風にして一般的に表はす事に到る道は主こして Schrödinger の根本的研究に依つて開鑿せられた．其の一般的な議論は前に述べた Dirac 及び Jordan の論文中にあるが，此の事に關しては後で詳細に述べるであらう．

然しながら aperiodisch な運動等を純粹に型の通りに取扱ふ事や，就中，週期的なシステムに角變數を導入するこ言ふ事は，すでに，Schrödinger の理論をまたなくこも，もつこ範圍の狹い手段でもなし遂げる事が出來る．此の目的の爲めには，先づ第一に今まで研究された量子力學的な量のマトリツクス的な表現法を全く止めてしまひ，そして，力學的な量の間に，其の記號的な和こか積こかに依つて作られた關係のみについて仕事をする．そうするこ，此の場合には力學的な量は言はば『超複素數』(hyperkomplexe Zahlen)こも言ふべきものこ考へられ，此の數は——丁度例へばあの Quaternionen こ同じ樣に，唯 Kommutativ の法則卽 (ab=ba) だけは例外であるが，すべての普通の計算規則に從ふ事になる．Dirac は，此の方法を始めて發表したのであるが，彼は普通の數卽ち『c-數』(c-Zahlen) に對して此の樣な數に『q-數』(q-Zahlen)こ言ふ名前を導入した．

此の事も亦唯一つの自由度を有するシステムに就て説明すれば充分である．エネルギー W は p こ q この函數である．卽ち $W=H(p, q)$．すべて此れ等の量 W, p, q は，今はマトリツクスこしては考へず，『q-數』こ見なす．同樣に，時間も亦一つの『q-數』であり，そして W 及び t なる量に對しては交換規則 $Wt-tW=\frac{h}{2\pi i}$ が成立する．換言すれば，W 及び t は p 及 q から一つのカノニツシユな轉換に依つて出て來べきである．一つの週期的運動の場合には他のカノニツシユな轉換に依つて，丁度古典的理論の作業變數及角變數(Wirkungs-und Winkelvariabeln)に相等する J, w なる二つの量を得る事が出來る．故に此れ等の J, w は同樣に交換規則 $Jw-wJ=\frac{h}{2\pi i}$ を充

たす．而してp及びqなる量はwの週期的函數であつて，其の係數は尙ほJの如何に依る．卽ち，

$$p=\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty}p_\tau(J)e^{2\pi i\tau w},\qquad q=\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty}q_\tau(J)e^{2\pi i\tau w}.$$

扨て今，斯くの如き二つのフリエ級數を乘ずる，卽ち例へばpqを作るならば，吾人は次の式を得る．

$$pq=\sum_{\tau\sigma}p_\tau(J)e^{2\pi i\tau w}q_\sigma(J)e^{2\pi i\sigma w};$$

古典的理論に從ふと，吾人は此の式を計算しかへて直ちに

$$pq=\sum_{\tau\sigma}p_\tau(J)q_\sigma(J)e^{2\pi i(\tau+\sigma)w}$$

なる形にする，かうして再びはじめの同じ型の級數を得る事が出來たわけである．然しながら『q-數』の場合には，實際Jとwとは交換する事は出來ないから，上の樣な變形は之れをなす事が出來ない．此の場合には（容易に證明する事が出來るやうに）寧ろ次の式が成立する：卽ち，

$$pq=\sum_{\tau\sigma}p_\tau(J)q_\sigma(J+\tau h)e^{2\pi i(\tau+\sigma)w}.$$

此の公式は然しながら，容易に說明されるやうに，『q-數』をもつて定義されたフリエの係數が，正にHeisenbergの乘法則に依つて相乘せられると言ふ事を示すものである！　此の際上のp及qに對するフリエの級數には正しい量子論的の振動數が入つて來る．而も茲には全く外のquasi-klassischな振動數が這入つて來るかのやうに見える．然しながら若しq或はpを時間に就て微分するならば正しい量子論的な振動數が現はれて來ると言ふ事は容易に論證する事が出來る．

古典的な理論と量子論との對應原理的な類似は，明らかに此の論據に依つて特に明白に現はれて來る．以前には吾々はHeisenbergのマトリックス要素を，古典的理論のフリエ係數と何か或る象徵的な相似性を有するやうなものと見なした．然し今では吾人は，マトリックス要素を嚴密な數學的な意味に於ける實際の量子論的フリエ係數として認める爲めにはたゞ不可交換的乘積法を導入すれば充分であると言ふ事を知つた．又『q-數』を數式立てる事に依つて，大きな量子數（比較的小さなhに際して）の領域に於ては古典的理論と量子論とは實際，豫期せねばならぬやうに，漸近的に相

一致するこ言ふ事も亦容易に證明される．如何こなれば，此の際交換規則の $pq-qp=\frac{h}{2\pi i}$ は p こ q こは正確に古典的にコムムターチフに振舞ふのではないが，然し大體コムムターチフに行動するこ言ふこ言ふ風に言ひ表はされるからである．コムムターチフな行動からの離れは h に比例する，故に單に小さな補正に過ぎない．卽ち此の小さな補正に依つて，量子力學は古典論的力學こ數學的に異なるのである．『q-數』を導入する事に依つて理論が得る所の此の內面的完結は，如何なるカノニッシユな轉換も $P_k=Tp_kT^{-1}$, $Q_k=Tq_kT^{-1}$ なる形で表はす事が出來るこ言ふ事が今や甚だ容易に證明される事にも表はれる．此の法則は，『q-數』をもつて數式立てた量子力學が或る點に於ては古典論的力學よりもより複雜であるこ言ふやうな事はなく寧ろそれこ反對により簡單であるこ言ふ事の丁度よい一例をなすものである．卽ち，古典的理論では，例外なしにすべてのカノニッシユな轉換を網羅する樣な簡單な表し方は存在しないのである．然しながら上のカノニッシユな轉換の表はしから，古典理論へのもつこ狹義な文字通の相似性をもつやうな他の表し方をも得る事が出來るのである．更に又，Dirac が示した樣に，『q-數』に依つて，質點の相對論的力學を四つの座標 x, y, z, ict 全部に對して對稱的な形に表はす事の可能性を得るのである．卽ち，マトリックス理論の始めの形に於ては，先づあまり滿足でない方法で空間的座標 x, y, z, をマトリックスこし，時間 t（從つて同樣に ict）はこれに反して普通の數こして考へねばならなかつたのであるが，今や x, y, z, ict 四つ共にみな『q-數』こして現れて來る．此の際力學的方程式を一つの非常に華麗な數式に組立てる事が可能になつてゐる――然かも此れからは其の最後の成績に關しては原形のマトリックス理論的の規約から出て來るのこ同じものが得られるのである．最後に話さねばならぬ事は，Wentzel がその非常に大膽なるそして天才的な方法で，『古典的』量子論に於て非常に效果多いものこして確かめられた Sommerfeld の複素數積分の方法を『q-數』をもつて量子論的に類推して出す事が出來た事である．

『q-數』の方法に依れば量子力學的フリエ係數は『q-數』こ置く事の出來る所の作業變數 J の函數こして誘出する事が出來るこ言ふ事は吾人の旣に見

た所である．然しながら Heisenberg のマトリツクス要素や，或は一般に實驗的事實こ比較する事の出來る量を得る爲めには，吾人は此のフリエの係數は量子數 m, n 從つて普通の『c-數』の函數こして決定せねばならぬ．Dirac に倣つて撰ばれる此のやり方は次の事から成り立つてゐる．卽ち，『q-數』の方法に依つて計算された函數に於て,簡單に『q-數のアルグメント』J をつまり普通の數に依つて置きかへるのである．若し『q-數』の理論の公式を物理學的に說明しやうこ欲するならば，何か之れに似寄つたやり方が，自然各々の問題に應用せられねばならないであらう．そして此れに對して一般的な原理が知られて居ない限り，アペリオディシユなシステムを『q-數』の方法で規則通りに取扱ふ事が出來た所で,それは大して物理學的に利用は出來まい．吾人は後で，此の『q-數』の理論に於て未解決の儘で殘された問題を如何にして一般的に解答する事が出來るかを見るであらう．

然し今茲で更に特別な點を明らかにして置こう．『q-數』の理論のフリエの係數から Heisenberg のマトリツクス要素を得る爲めには，作業變數に對して，何か任意の『c-數』こ言ふ樣なものではなく h の丁度整數倍のみを代入せねばならぬ．此の事は，量子力學を『q-數』で數式立てる事には運動方程式や交換規則の外に尙ほ一つ特種な『量子撰』(Quantelung) が必要であるこ言ふ事を示すものである．Heisenberg のマトリツクスの根據は次の樣な事であつた．卽ち第一に力學的諸量のマトリツクス的表し方こマトリツクスの乘法であり，第二にはカノニツシユな交換規則であつた．Heisenberg の理論では特種な『量子撰』こ言ふやうなものは最早や必要ではなかつた．然しながら『q-數』理論に於ては此の『量子撰』が新しく現はれて來る．而して此の『量子撰』は未だ完全に正體を摑む事は出來ぬが，より深い物理學的な意義を有するに違ひないこ言ふ事は疑はんこ欲するも得べからざる所のものこなる．

『量子撰』の此の物理學的意味を明らかにしたのが Schrödinger であつた．卽ち，Schrödinger が發見したやうに，吾人は今まで考へられて居たのこはまるきり他の方面から原子の正確な力學に突入する事が出來るのである．Schrödinger の研究が出發した所の事實は Heisenberg の思想の據つて起つた所こは遙かに離れて居る．故に以下其の Schrödinger が出發した事實に就いて數言を費すのが順序であらうこ考へる．（荒木俊馬譯）